Теорема «О амплитудно-частотной характеристике идеальной бинарной случайной последовательности».

<u>Сведения об авторе</u>. Инженер-программист НТЦ Модуль, Филатов О.В. г. Москва.

<u>Аннотация</u>. В экспериментах по подбрасыванию монеты был найден закон связывающий число бросков монеты с числом составных событий заданной длины. В статье приводится его вывод в виде доказательства математической теоремы. Следствием теоремы являются: число составных событий образующих бинарную последовательность равно ½ от числа бросков монеты, средняя длина составного события равна двум броскам монеты. Появилась возможность количественного расчёта спектров в почти бесконечных последовательностях.

Понятия, терминология, формулы, описывающие новые найденные закономерности бинарных случайных последовательностей описываются в работах [1 – 5]. Для проведения доказательства в этой статье вводятся минимально необходимые понятия.

Предварительно закрепив за каждой из сторон монеты значения нуля и единицы, запишем результаты её подбрасывания последовательно друг за другом, по очерёдности их выпадения: «10110011110100010101100…». Результат последнего выпадения монеты дописывается вслед за результатом предыдущего выпадения монеты. Таким образом, получаем бинарную случайную последовательность, которой дадим название «Потоковая последовательность».

Наименование «потоковая» отражает то, что последовательность наращивает свои элементарные события прямо в реальном времени. Каждое, только что полученное, крайнее, событие включается в процесс алгоритмического анализа. Генерация потока случайных событий «рождающихся на глазах» наблюдателя снимает вопрос о заранее подготовленных данных. Для использования открытых и описываемых в работах [1-5] формульных зависимостей, требуется, что бы потоковая последовательность была конечной. Только в конечных последовательностях можно предсказывать будущие события по уже реализованным событиям. Зависимость рассчитанных характеристик от полученного потока данных, ассоциируется у автора со счётным потоком, и отличает данную авторскую Потоковую модель выпадения монеты от других авторских моделей, с их авторскими названиями и личными парадигмами. Хотя можно говорить и о бесконечном варианте потоковой последовательности точно так, как и о любой другой последовательности.

Пример сокращённого обозначения потоковой последовательности - F0,5(N). В нём используется сборка из трёх элементов: F+0,5+(N).

Буква F (Flow - поток) является символом, обозначающим потоковую последовательность.

Вероятность выпадения элементарного события обозначается числом 0,5 после символа F (в работе [1] рассмотрены последовательности F0,X(N) с другими значениями (0,X) вероятности выпадающего элементарного события).

В скобочках пишется номер N последнего броска монеты в последовательности.

Составными событиями ^{n}S в F0,5(N) (смотри [1,2]), называют неразрывные области одинаковых элементарных событий. Буква n – обозначает число элементарных событий образующих составное событие, n ставится сверху слева перед символом S. Пример трёх одинаковых составных событий ^{2}S, каждое из которых образованно двумя элементарными событиями: «11», «11», «00». Разные ^{n}S: «11», «1», «000», «0000».

Пример разложения F0,5(11) – потоковой последовательности из одиннадцати элементарных событий: «11100010100», на составные события ${}^{3}S_1$, ${}^{3}S_2$, ${}^{1}S_3$, ${}^{1}S_4$, ${}^{1}S_5$, ${}^{2}S_6$.

${}^{\boldsymbol{n}}\boldsymbol{S}$	${}^{3}S_1$	${}^{3}S_2$	${}^{1}S_3$	${}^{1}S_4$	${}^{1}S_5$	${}^{2}S_6$
F0,5(11)	111	000	1	0	1	00

Будем различать обозначение множества ${}^{n}S$ составных событий (например: ${}^{3}S$), которое пишется без нижнего правого порядкового номера, от конкретного составного события (например: ${}^{3}S_2 = "000"$) являющимся элементом этого множества. Член множества составных событий ${}^{n}S_i$ кроме числа n – обозначающего количество элементарных событий его образующего имеет ещё и индекс i, в нижнем правом углу. Индекс i, в зависимости от контекста, обозначает порядковый номер составного события: либо во множестве ${}^{n}S$, либо в F0,5(N).

Число составных событий множества ${}^{n}S$ в F0,5(N) рассчитывается по формуле 1, оно зависит от числа бросков монеты N и количества равных элементарных событий n, образующих составные события данной длины:

$$ {}^{n}S = \frac{N}{2^{n+1}} \qquad \text{Ф.1} $$

Где: N – число бросков монеты; n – число элементарных событий образующих составные события данной длины.

Идеальная потоковая последовательность отличается от реальной F0,5(N) тем, что число её составных событий ${}^{n}S$ совпадает с целыми (или округлёнными до целых) величинами, рассчитанными по формуле 1.

Теорема *«О амплитудно-частотной характеристике идеальной бинарной случайной последовательности».*

В идеальной случайной последовательности F0,5(N), получаемой как результат последовательной записи результатов бросков монеты, можно выделить группы составных событий ^{n}S. Составные события каждой группы образованны из n элементарных событий по принципу равенства соседних результатов выпадения монеты, где n =1,2,3, ... И численность составных событий ^{n}S прямо пропорциональна числу бросков монеты N и обратно пропорционально двойке в степени n плюс один, формула 1.

Доказательство

Согласно классической концепции вероятностей частота появления событий прямо зависит от величины вероятности наступления этих событий. А значит, и число выпавших событий прямо зависит от величины вероятности наступления этих событий. И число событий, с которыми связана большая вероятность их выпадения будет больше, по сравнению с числом событий, с которыми связана меньшая вероятность их выпадения.

Следовательно, число объектов имеющих вероятность выпадения $1/_2$ будет в два раза больше числа объектов имеющих вероятность выпадения $1/_4$. А число объектов с вероятностью выпадения $1/_4$ будет в два раза больше числа объектов имеющих вероятность выпадения $1/_8$. И т.д.

Присвоим одной стороне монеты значение «1», а другой значение «0». Построим таблицу 1 с первыми величинами вероятностного ряда p_n, в котором связывается число n=1,2,3,…, выпадающих подряд одинаковых элементарных событий с составными событиями ^{n}S:

Таблица 1.

n	1	2	3	4	5	6	…
p_n	0,5	0,25	0,125	0,0625	0,03125	0,015625	…
^{n}S	«1» «0»	«11» «00»	«111» «000»	«1111» «0000»	«11111» «00000»	«111111» «000000»	…

В полном соответствии с классической теории вероятностей в потоковой последовательности вероятность выпадения одной единицы «1» (или нуля) в два раза выше, чем вероятность выпадения подряд двух единиц «11» (или нулей), и отношение этих вероятностей равно двум: 0,5/0,25 = 2.

Вероятность выпадения двух единиц подряд «11», в два раза выше, чем вероятность выпадения трёх единиц подряд«111», и отношение этих вероятностей равно двум: 0,25/0,125 = 2. И так далее (что бы убедиться в справедливости распределения представленного в таблице можно составить гистограмму составных событий для любой реальной F0,5(200)).

Замечаем, что такие вероятностные отношения, когда числа различных выпадающих событий отличаются в два раза, описывается формулой 2:

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{p_2}{p_3} = \frac{p_3}{p_4} = \cdots = \frac{p_n}{p_{n+1}} = 2 \qquad \text{Ф.2}$$

Где: n = 1,2,3, …; p_n - вероятность наступления событий из множества ${}^{n}S$; p_{n+1} - вероятность наступления событий из множества ${}^{n+1}S$.

Но, из того, что число выпавших событий прямо зависит от величины вероятности наступления этих событий, следует, что число событий в множестве ${}^{n}S$ будет в два раза больше числа событий в множестве ${}^{n+1}S$.

$$\frac{p_n}{p_{n+1}} = \frac{{}^{n}S}{{}^{n+1}S} = 2 \qquad \text{Ф.3}$$

В формуле 3 неизвестны величины ${}^{n}S$ и ${}^{n+1}S$, но согласно классической концепции вероятностей их величины прямо зависят от величин вероятностей наступления этих событий. А их отношения так же равно двум, как и отношения их вероятностей в формуле 2.

$$\frac{{}^{1}S}{{}^{2}S} = \frac{{}^{2}S}{{}^{3}S} = \frac{{}^{3}S}{{}^{4}S} = \cdots = \frac{{}^{n}S}{{}^{n+1}S} = 2 \qquad \text{Ф.4}$$

Тогда связь численности событий подмножества ${}^{1}S$ и численности событий из подмножеств ${}^{n}S$, где n > 1, будет:

${}^{1}S = 2 \cdot {}^{2}S$; ${}^{2}S = 2 \cdot {}^{3}S$; ${}^{1}S = 2 \cdot 2 \cdot {}^{3}S = 2^2 \cdot {}^{3}S$; …

Приведённые выкладки обобщает формула 5, выражающая число составных событий единичной длины через число составных событий любых других длин n > 1:

$$^{1}S = 2^{n-1} \cdot {}^{n}S; \qquad \text{Ф.5}$$

Выразим численность составных событий подмножества ^{n}S через число составных событий подмножества ^{1}S:

$$^{n}S = \frac{^{1}S}{2^{n-1}}\ ; \ \text{где: } n = 1,2,3,\ldots \qquad \text{Ф.6}$$

Замечаем, что при $n = 1$, ^{n}S равно ^{1}S.

Найдём сумму всех составных событий ^{n}S, для n>1. Через составные события ^{1}S, согласно формуле 6, выражены все остальные события ^{n}S:

$$\sum_{n=2}^{n\to\infty} {}^{n}S = \sum_{n=2}^{n\to\infty} \frac{^{1}S}{2^{n-1}} = 2 \cdot {}^{1}S \cdot \sum_{n=2}^{n\to\infty} \frac{1}{2^{n}} = 2 \cdot {}^{1}S \cdot \frac{1}{2} = {}^{1}S \qquad \text{Ф.7}$$

Оказывается, что сумма всех составных событий ^{n}S в F0,5(N), где n=2,3,4, … , равна ^{1}S - числу составных событий единичной длины.

Отсюда, полное число составных событий потоковой последовательности (включая составные события единичной длины ^{1}S), равно удвоенному числу составных событий единичной длины, формула 8:

$$\sum_{n=2}^{n\to\infty} {}^{n}S + {}^{1}S = \sum_{n=1}^{n\to\infty} {}^{n}S = 2 \cdot {}^{1}S \qquad \text{Ф.8}$$

Найдём число элементарных событий N потоковой последовательности через число элементарных событий n, которые находятся в каждом составном событии $^{n}S_i$. Это можно сделать, потому что в каждом составном событии $^{n}S_i$ множества ^{n}S находится n элементарных событий, и в каждом множестве составных событий ^{n}S находится $^{n}S \cdot n$ элементарных события.

Тогда N бросков монеты образующих потоковую последовательность представляет собой сумму элементарных событий в каждом из множеств ^{n}S.

Учитывая, что все множества ${}^{n}S$ по формуле 6 могут быть выражены через ${}^{1}S$, получаем формулу 9:

$$N = \sum_{n=1}^{n\to\infty} {}^{n}S \cdot n = \sum_{n=1}^{n\to\infty} \frac{{}^{1}S \cdot n}{2^{n-1}} = 2 \cdot {}^{1}S \cdot \sum_{n=1}^{n\to\infty} \frac{n}{2^{n}} = 4 \cdot {}^{1}S \qquad \text{Ф.9}$$

Преобразуя формулу 9 относительно ${}^{1}S$, находим в потоковой последовательности число составных событий единичной длины:

$${}^{1}S = \frac{N}{4} \qquad \text{Ф.10}$$

Теперь подставим найденные в формуле 10 составные события ${}^{1}S$ в формулу 6 и поучим искомую формулу 1, связывающую число составных событий ${}^{n}S$ с его длиной n, и с числом бросков монеты N.

$${}^{n}S = \frac{{}^{1}S}{2^{n-1}} = \frac{N}{4} \cdot \frac{1}{2^{n-1}} = \frac{N}{2^{n+1}}$$

Теорема доказана.

Следствие 1. «Число составных событий в потоковой последовательности равно половине от числа бросков монеты».

Так как по формуле 8 сумма всех составных событий потоковой последовательности равна удвоенной сумме составных событий первой моды, то после замены ${}^{1}S$ на его выражение по формуле 10 получаем число составных событий потоковой.

Действительно:

$$2 \cdot {}^{1}S = 2 \cdot \frac{N}{4} = \frac{N}{2}$$

Сумма всех составных событий потоковой последовательности:

$$\sum_{n=1}^{n\to\infty} {}^{n}S = \sum_{n=1}^{n\to\infty} \frac{N}{2^{n+1}} = \frac{N}{2} \cdot \sum_{n=1}^{n\to\infty} \frac{1}{2^{n}} = \frac{N}{2}$$

Следствие 2. «Средняя длина составного события равна двум».

Для нахождения средней длины составного события разделим число элементарных событий потоковой последовательности N на число всех её составных событий - $\sum_{n=1}^{n\to\infty} {}^{n}S$.

$$\frac{N}{\sum_{n=1}^{n\to\infty} {}^{n}S} = N \cdot \frac{2}{N} = 2$$

Средняя длина составного события равна двум элементарным событиям.

Следствие 3. «Вероятность выпадения составного события обратно пропорционально двойки, возведённую в степень длины этого события».

По частотной модели вероятностей, вероятность выпадения составного события p_n есть отношение числа выпавших определённых событий ${}^{n}S$ к общему числу событий. Поэтому, делим ${}^{n}S$ которые находятся по формуле 1, на число составных событий ($\frac{N}{2}$ - следствие 1) в F0,5(N):

$$p_n = {}^{n}S \colon \frac{N}{2} = \frac{N}{2^{n+1}} : \frac{N}{2} = \frac{1}{2^n}$$

Следствие 4. «Вероятность выпадения полярного составного события обратно пропорционально двойки, возведённую в степень длины события увеличенной на единицу».

О полярных составных событиях написано в [1-2]. Действительно, поскольку составные события ${}^{n}S$ в равных долях образуются полярными составными событиями, то вероятность выпадения полярного составного события px_n будет равна половине вероятности составного события:

$$px_n = \frac{p_n}{2} = \frac{1}{2^{n+1}}$$

Перечень областей в которых найдено применение потоковой теории:

1) Экономика. Биржевой анализ движения цен.
2) Статистика. В работе [4] показан класс статистических исследований, в которых происходит изменение численных пропорций составных событий при выборочном наборе статистических данных.
3) Теория вероятностей и вероятностные процессы. Расчёт количественных характеристик в почти бесконечных последовательностях [1,2,3,4,5]. Обнаружение предсказуемости и возможности выбора пропорционального состава ещё не выпавших составных событий в зависимости от уже выпавших составных событий потоковой последовательности.
4) Информатика, криптография. Предложен новый способ записи чисел, основанный на законах распределения составных событий в потоковой последовательности [7].
5) Лингвистика. Анализ языков, анализ произведений писателей [6].
6) Психология. Анализ психологических особенностей человека.

Один из экспериментально обнаруженных эффектов в бинарной (потоковой) последовательности назван «Эффектом Арнольда – Филатова» в честь академика Арнольд а – теоретически предсказавшего существование бинарной сложности и экспериментатора, обнаружившего существование бинарной сложности в природе [7].

Библиографический список

1. Филатов О. В., Филатов И.О., Макеева Л.Л. и др. «Потоковая теория: из сайта в книгу». М.: Век информации, 2014. С.200.

2. Филатов О. В., Филатов И.О., Статья «О закономерностях структуры бинарной последовательности», «Журнал научных публикаций аспирантов и докторантов», №5, 2014.
3. Филатов О. В., Филатов И.О., Статья «О закономерностях структуры бинарной последовательности (продолжение, начало см. в №5 май 2014 г.)», «Журнал научных публикаций аспирантов и докторантов», №6, 2014.
4. Филатов О. В., Филатов И.О., Статья «О закономерностях структуры бинарной последовательности (продолжение, начало см. в №5 и №6 2014 г.)», «Журнал научных публикаций аспирантов и докторантов», №7, 2014.
5. Филатов О. В., Филатов И.О., Статья «О закономерностях структуры бинарной последовательности (продолжение, начало см. в №№5-7 2014 г.)», «Журнал научных публикаций аспирантов и докторантов», №8, 2014.
6. Филатов О. В., Статья «Методика поиска родства языков по чередованию гласных и согласных букв в письменных источниках», «Журнал научных публикаций аспирантов и докторантов», №9, 2014.
7. Филатов О. В., Филатов И.О., Статья «Эффект Арнольда – Филатова. Золотое, серебряное сечения. Альтернативная запись бесконечно сложной последовательности. Аргументация по фундаментальности «Потоковой теории»», «Журнал научных публикаций аспирантов и докторантов», №12, 2014.

Если:

- в потоковой последовательности F0,5(N) получаемой как результат записи бросков честной монеты выделять группы составных событий ^{n}S;

- составные события каждой группы образованны из n элементарных событий по принципу равенства соседних результатов выпадения монеты;

- и у составных событий ^{n}S частоты встречания зависят от номера n - обозначающего длину составного события, где n =1,2,3, ... и частоты встречания кратны двум;

то, амплитуда (численность) составных событий ^{n}S будет прямо пропорциональна числу бросков монеты N и обратно пропорциональна двойке в степени n плюс один, формула 1.